

Manizales, Colômbia

Primeiro dia

28 de outubro de 2026

Problema 1. No plano, considere a circunferência Γ de centro $O = (0, 0)$ e raio 1. Seja ℓ a reta $x = 1$ e seja $\Gamma^* = \Gamma \setminus \{(1, 0), (-1, 0)\}$. Defina a função $F : \Gamma^* \to \Gamma^*$ da seguinte forma: se $A \in \Gamma^*$ e B é a interseção de ℓ com a tangente a Γ por A, então $F(A)$ é a interseção da reta BO com Γ, de forma que O esteja entre B e $F(A)$. Considere $P_0 = (x, y) \in \Gamma^*$ com $y > 0$, e defina a sequência $P_{n+1} = F(P_n)$ para $n \geq 0$. Demonstre que cada uma das sequências $(P_0, P_2, P_4, \ldots)$ e $(P_1, P_3, P_5, \ldots)$ é convergente e determine seus respectivos limites.

Problema 2. Um polinômio $P(x)$ com coeficientes reais é chamado *parceiro* se é tal que $P(0) = 1$ e existem reais $a_1, a_2, \ldots, a_{2026}$ tais que

$$P(P(x)) = a_1 P(x) + a_2 P(x^2) + a_3 P(x^3) + \ldots + a_{2026} P(x^{2026})$$

para todo x real. Determine quantos polinômios *parceiros* existem.

Problema 3. Para $a \in \mathbb{R}$, determine todas as funções contínuas $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ tais que $f\left(\{x + e^{f(x)}\}\right) - f(x) = a$ para todo $x \in [0, 1]$.

Nota: A parte fracionária $\{y\}$ é igual a $y - \lfloor y \rfloor$, onde o piso $\lfloor y \rfloor$ é o maior inteiro menor ou igual a y.

Cada problema vale 10 pontos
Tempo máximo: 4h 30m.



Manizales, Colômbia

Segundo dia

29 de outubro de 2026

Problema 4. Sejam a e b números reais distintos. Dados reais c, d e um polinômio $p(x)$ de coeficientes reais e de grau no máximo 3, considere a quádrupla $S_p(c,d) = (p(a), p(b), p'(c), p'(d))$. Determine todos os possíveis valores reais de c, em função de a e b, tais que para todo $d \neq c$, é possível determinar de forma única qualquer polinômio $p(x)$ de grau no máximo 3, a partir do valor de d e da quádrupla $S_p(c,d)$.

Nota: $p'(x)$ denota a derivada de $p(x)$.

Problema 5. Seja x_1 um real não-negativo. A sequência $(x_1, x_2, x_3, \ldots)$ se define por

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}x_n^2 + \frac{x_1 x_2 \cdots x_n}{1 + x_n},$$

para $n \geq 1$. Determine os possíveis valores de x_1 para os quais a sequência $\{x_n\}$ converge, e em tais casos determine seu limite em função de x_1.

Nota: Por exemplo, $x_2 = \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{x_1}{1+x_1}$, $x_3 = \frac{1}{2}x_2^2 + \frac{x_1 x_2}{1+x_2}$.

Problema 6. Seja $k > 1$ um inteiro e considere a sequência definida por $a_1 = 1$, $a_2 = k$ e $a_{n+2} = k a_{n+1} - a_n$ para $n \geq 1$. Para $n \geq 2$, defina p_n, q_n como os inteiros positivos coprimos tais que

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{p_2}{q_2} \quad \text{e} \quad \frac{a_1 + \cdots + a_{n-1}}{a_n} = \frac{p_n}{q_n}.$$

Demonstre que $p_{n+1}q_n - p_n q_{n+1} = 1$ para todo $n \geq 2$.

Cada problema vale 10 pontos
Tempo máximo: 4h 30m.