6ª Olimpíada Pan-Americana Feminina de Matemática

Dia 1

20 de outubro de 2026

Problema 1. Seja ABC um triângulo acutângulo com todos os lados distintos. As mediatrizes de AB e AC cortam o segmento BC em P e Q, respectivamente, e se intersectam em O. Se $\angle BAQ = 2\angle PAC$, calcule a medida do ângulo $\angle AOC$.

Problema 2. Em um tabuleiro de 2025×2025, algumas casas são pintadas de preto de modo que:

- Em qualquer bloco de 3×1 ou 1×3 em que pelo menos duas das casas são pretas, a terceira também deve ser preta.
- Pelo menos uma casa do tabuleiro permanece sem pintar.

Qual é a maior quantidade de casas que podem ser pintadas?

Problema 3. Um inteiro positivo N é chamado de *búcaro* se pode ser escrito na forma

$$N = \frac{(a+b)^{n+k}}{a^n \cdot b^k},$$

onde a, b, n e k são inteiros positivos. Encontre todos os números N que são búcaros.

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos

Scanned with CamScanner

6th Olimpíada Pan-Americana Feminina de Matemática

Dia 2

20 de outubro de 2026

Problema 4. Seja $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$ uma sequência de números reais tal que $0 < a_1 \leq 1 \leq a_2 \leq 3$ e

$$a_{n+2} = a_n + \frac{1}{a_{n+1}}, \quad \text{para todo } n \geq 1.$$

Por exemplo: $a_3 = a_1 + \frac{1}{a_2}$ para $n = 1$, $a_4 = a_2 + \frac{1}{a_3}$ para $n = 2$, etc.

Demonstre que $a_n \leq \frac{3n}{2}$ para todo $n \geq 1$.

Problema 5. Determine todos os inteiros $n \geq 2$ tais que cada um dos seguintes números são divisores de $n + 1$:

$$\begin{gathered} \operatorname{mdc}(n,1) + \operatorname{mdc}(n,2), \\ \operatorname{mdc}(n,2) + \operatorname{mdc}(n,3), \\ \operatorname{mdc}(n,3) + \operatorname{mdc}(n,4), \\ \vdots \\ \operatorname{mdc}(n,n-1) + \operatorname{mdc}(n,n). \end{gathered}$$

Nota: Se a e b são dois inteiros positivos, o maior divisor que têm em comum é denotado por $\operatorname{mdc}(a,b)$.

Problema 6. Seja ABC um triângulo acutângulo tal que $AB < AC$, com circuncírculo Γ. Seja D o pé da altura de A até BC. O círculo de diâmetro AD corta AB em $X \neq A$ e Γ em $Y \neq A$. Sejam O_1, O_2 e O_3 os circuncentros dos triângulos ABC, ADX e BXC, respectivamente. Demonstre que os triângulos XBY e $O_1O_2O_3$ são semelhantes.

Tempo: 4 horas e 30 minutos
Cada problema vale 7 pontos

Scanned with CamScanner