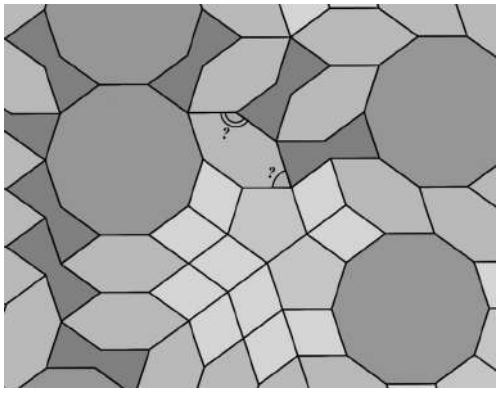
12ª **Olimpíada Iraniana de Geometria**

Nível Elementar: 7º e 8º anos

17 de Outubro de 2025

Os problemas desta prova devem ser mantidos em sigilo até que sejam publicados no site oficial da IGO: igo-official.com

Problema 1. A figura abaixo mostra uma peça de azulejo em uma mesquita na cidade de Isfahan. A figura é composta por cinco tipos de polígonos. Ela consiste em um pentágono regular e um decágono regular, com todos os lados de mesmo comprimento. Os hexágonos da figura possuem quatro ângulos iguais, e os outros dois ângulos também são iguais entre si. Encontre as medidas dos ângulos marcados.



Problema 2. É dado um triângulo equilátero ABC. Os pontos O_1 e O_2 estão localizados nos lados AB e AC, respectivamente. Sabe-se que o círculo com centro em O_1 e passando por B é tangente externamente ao círculo com centro em O_2 e passando por C em um ponto P localizado dentro do triângulo. Determine a medida do ângulo $\angle BPC$.

Problema 3. Arash recebeu um triângulo retângulo isósceles de papel. Uma dobra desse papel é chamada de *boa* se o polígono obtido após a dobra tiver todos os ângulos menores que 180°. Arash realiza uma dobra *boa*. Babak pega o papel e realiza duas dobras *boas*, de modo que, ao final, o papel tenha sido dobrado exatamente três vezes. Arash quer que o polígono final tenha o maior número possível de lados, enquanto Babak quer o contrário. Supondo que ambos dobrem de maneira optimal para seus objetivos, quantos lados terá o polígono final?

Problema 4. Sabe-se que cada diagonal de um quadrilátero convexo é maior que cada um de seus lados. Prove que o comprimento de cada diagonal é menor que $\sqrt{3}$ vezes o comprimento de um dos lados.

Problema 5. No triângulo ABC, com $\angle CAB = 15°$ e $\angle CBA = 30°$, os pontos X e Y estão localizados dentro do ângulo $\angle BCA$ de modo que $\angle BCX = \angle ACY = 45°$, $BC = CY$ e $AC = CX$. As retas XY e AB se intersectam no ponto Z. Prove que $AZ = BC$.

Tempo: 4 horas.
Cada problema vale 8 pontos.

12ª Olimpíada Iraniana de Geometria

Nível Intermediário: 9º ano e 1ª série

17 de Outubro de 2025

Os problemas desta prova devem ser mantidos em sigilo até que sejam publicados no site oficial da IGO: igo-official.com

Problema 1. Seja $PYXQ$ um trapézio retângulo ($PY \perp PQ \perp QX$). Sejam A e B pontos na reta PQ tais que $\angle AYQ = \angle BXP = 90°$. Se S é o ponto de interseção das diagonais do trapézio, prove que $\triangle AYS \sim \triangle BXS$.

Problema 2. Seja $ABCD$ um quadrado. Seja E o ponto médio do lado BC e F o ponto no lado AB tal que $DE \perp EF$. Seja G um ponto no interior do quadrado tal que $GF = EF$ e $GF \perp EF$. As retas AC e DE se intersectam no ponto X. Prove que os pontos B, G, E, X são concíclicos.

Problema 3. Seja ABC um triângulo e ω seu circuncírculo. Seja T o ponto médio do arco BC que não contém A. A reta BT intersecta a bissetriz externa do ângulo BAC no ponto P. Se H é o pé da perpendicular por A à reta tangente a ω por T e M é o ponto médio de AP, prove que $\angle AHM = \angle ACP$.

Problema 4. No hexágono convexo $ABCYXD$, temos

$$\angle ACY = \angle BDX = 90°,$$

$$\angle BAC = 2\angle CAY, \quad \angle ABD = 2\angle DBX,$$

$$XY = DX + CY.$$

Prove que

$$\sqrt{(CD - DX)(CD - CY)} \leq \frac{AC + BD - AB}{2}.$$

Problema 5. Seja ABC um triângulo tal que $AB < AC$ e ω uma circunferência arbitrária passando por B e C. Sejam F e E as interseções de ω com AB e AC, respectivamente. Sejam M e N as interseções das mediatrizes dos segmentos BF e CE com o lado BC, respectivamente. Seja P a interseção da mediatriz de MN com EF. Prove que, ao variar ω, o ponto P varia em uma reta fixa.

Tempo: 4 horas e 30 minutos.
Cada problema vale 8 pontos.

12ª **Olimpíada Iraniana de Geometria**

Nível Avançado: 2ª e 3ª séries

17 de Outubro de 2025

Os problemas desta prova devem ser mantidos em sigilo até que sejam publicados no site oficial da IGO: igo-official.com

Problema 1. Em um triângulo isósceles ABC ($AB = AC$), sejam X e Y pontos no lado BC, com X entre B e Y. Seja ω_1 o circuncírculo de AYB. O círculo ω_2 passa pelos pontos C e X e é tangente a AC. Os pontos M e N são os pontos de interseção dos círculos ω_1 e ω_2. Mostre que $\angle AMX = \angle BNX$.

Problema 2. O quadrilátero $ABCD$ é inscrito em um círculo ω. Pontos X, Y, $X \neq Y$, estão nas semirretas DB, CA de modo que $DA = DX$ e $CB = CY$. As retas AX, BY intersectam o lado CD nos pontos P, Q, respectivamente. Mostre que o eixo radical dos circuncírculos de APC, BQD e a mediatriz de AB se encontram em ω.

Problema 3. O ponto M é ponto médio do lado BC de um triângulo ABC, onde $AB \neq AC$. X é um ponto qualquer no segmento AM. A' é um ponto no circuncírculo de ABC tal que $AA' \parallel BC$. O circuncírculo de AXA' intersecta os lados AB, AC nos pontos F, E, respectivamente, e P é a interseção das retas $BC, A'X$. Mostre que $PMEF$ é cíclico.

Problema 4. Dado o triângulo isósceles ABC, com $AB = AC$, sejam M e N pontos no lado BC tais que $\angle MAN = \frac{1}{2}\angle BAC$ em que M está entre B e N. Considere P o circuncentro do triângulo AMN. As mediatrizes de AM e AN intersectam BC nos pontos R e Q, respectivamente. Os pontos S e T são tais que S está em PR, T está em PQ e $ST \perp PA$. Sejam K e L os reflexos de A por QS e RT, respectivamente. Prove que os circuncírculos de CMK e de BNL se intersectam na mediatriz do lado BC.

Problema 5. O incírculo do triângulo ABC tangencia os lados AC e AB em E e F, respectivamente. O círculo ω_1 é tangente ao circuncírculo de ABC e aos segmentos BE e CE. O círculo ω_2 é tangente ao circuncírculo de ABC e aos segmentos CF e BF. Prove que o exsimilicentro de ω_1 e ω_2 está no eixo radical do incírculo e do circuncírculo de ABC.
(O exsimilicentro de dois círculos é o encontro das tangentes comuns externas deles)

Tempo: 4 horas e 30 minutos.
Cada problema vale 8 pontos.